

ФМИ ТМИЛ 2018 - Задачи

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

22 юни 2018

Задача 1

За да продължим лебеговата мярка m над краен затворен интервал върху цялата реална права, разбираме реалната права на изброимо много крайни затворени интервали с положителна дължина:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

като всеки два интервала могат да имат най-много една обща точка. Казваме, че множеството $S \subseteq \mathbb{R}$ е измеримо, ако $S \cap I_k$ е измеримо за всяко k . В този случай полагаме

$$m(S) = \sum_{k=1}^{\infty} m(S \cap I_k).$$

Докажете, че

- (а). дефиницията на $m(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}$ не зависи от разбиването $\{I_k\}$;
- (б). множеството от измеримите подмножества на $\mathbb{R}$ е σ -алгебра;
- (в). m върху $\mathbb{R}$ е пълно адитивна.

Решение. (а) Първо да отбележим че ако два непразни интервала имат една обща точка, то това не влияе на адитивността на лебеговата мярка за тях. Наистина, като вземем предвид, че лебеговата мярка от едноточкови множества е 0, за интервалите $[a, b]$ и $[a, c]$, $b < c$, имаме

$$\begin{aligned} m([a, b]) + m([b, c]) &= m([a, b]) + m((b, c]) + m(\{b\}) = m([a, b] \cup (b, c]) + m(\{b\}) = \\ &= m([a, c]) + m(\{b\}) = m([a, c]). \end{aligned}$$

И така, нека $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{J_s\}_{s=1}^{\infty}$ са две разбивания на $\mathbb{R}$ на непразни затворени интервали такива, че $I_k \cap A$ и $J_s \cap A$ са измерими за всяко i и j и имат най-много една обща точка два по два. Ще докажем, че редовете

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap A) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} m(J_s \cap A)$$

са едновременно сходящи към една и съща стойност (т.е., мярката на A е крайна) или разходящи (т.е. мярката на A е $+\infty$). Нека първо редовете са сходящи с граници съответно α и β . Да отбележим, че за всеки от интервалите I_k е изпълнено $I_k = \bigcup_{s=1}^{\infty} (J_s \cap I_k)$. Тогава от пълната адитивност на m върху всички I_k и J_s имаме

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} m(I_k \cap J_s \cap A) = \sum_{s=1}^{\infty} m(J_s \cap A) = \beta, \quad (1)$$

т.е. двата реда имат за граница една и съща стойност, т.е. ако $m(A) < \infty$, то $m(A)$ не зависи от разбиването на $\mathbb{R}$. Ако поне един от двата реда е разходящ, то всички редове в (1) са разходящи и следователно $m(A) = +\infty$, независимо от разбиването.

(б) Ще проверим дали за фамилията $\mathcal{F}$ от измерими по Лебег върху $\mathbb{R}$ множества са изпълнени трите аксиоми за σ -алгебра. нека $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ е разбиване на $\mathbb{R}$ на непразни затворени интервали, които имат най-много една обща точка два по два.

$\mathcal{F}$ е непразно Очевидно $\emptyset \in \mathcal{F}$.

σ адитивност Нека $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$. Ние знаем, че за всеки интервал I_k и за всяко $j \in \mathbb{N}$ множеството $A_j \cap I_k$ е измеримо, тъй като $A_j \in \mathcal{F}$. Тогава $A \cup I_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cup I_k)$ също е измеримо спрямо m за всеки интервал I_k , следователно $A \in \mathcal{F}$.

Допълнението на измеримо множество е измеримо Нека $A \in \mathcal{F}$, т.е. $A \cap I_k$ е измеримо спрямо m за всеки интервал I_k . Тъй като $I_k = (I_k \cap A) \cup (I_k \setminus A)$ и разликата на две измерими подмножества на I_k е измеримо, то $I_k \setminus A = I_k \cap A^c$ също е измеримо за всеки интервал I_k . Следователно $A^c \in \mathcal{F}$.

(в) Нека сега $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ и $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ и всичките A_j и A имат крайни мерки. Прилагаме дефиницията за лебегова мярка върху $\mathbb{R}$ и пълната адитивност на m върху всеки един от интервалите I_k , за да получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} m(A_j \cap I_k) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} m \left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cap I_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A \cap I_k) = m(A).$$

Ако поне едно от множествата A или A_j за някое j имат безкрайна мярка, то всички редове горе са разходящи. Можем да твърдим, че адитивността продължава да важи и в този случай, т.е. $\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) = m(A) = +\infty$.

Задача 2

Нека $(X, \mathcal{F}, \mu)$ е пространство с мярка, $f \in M^+(X, \mu)$ и $\lambda > 0$. Докажете неравенството на Чебишов

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu.$$

Докажете с негова помощ, че ако $f \in M^+(X, \mu)$ и $\int_X f d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ п.н.

Решение. Ще докажем неравенството на Чебишов в случая $\lambda = 1$, а горното твърдение ще следва от това, че $\frac{f}{\lambda} \in M^+(X, \mu) \forall \lambda > 1$. Разглеждаме разликата

$$\delta = \int_X f d\mu - \mu(\{x \in X : f(x) > 1\}). \quad (2)$$

Означаваме с T множеството $\{x \in X : f(x) > 1\}$. Тъй като f е измерима, то T е измеримо множество. Тогава (2) се свежда до

$$\delta = \int_X f d\mu - \mu(T) = \int_X f d\mu - \int_X \chi_T d\mu = \int_X (f - \chi_T) d\mu = \int_T (f - 1) d\mu + \int_{T^c} f d\mu.$$

Тъй като върху T функцията f е строго по-голяма от 1, то и двата интеграла имат положителна стойност и следователно $\delta \geq 0$. Но това значи, че

$$\mu(\{x \in X : f(x) > 1\}) \leq \int_X f d\mu.$$

И така, нека $f \in M^+(X, \mu)$ и $\int_X f d\mu = 0$. От неравенството на Чебишев следва, че за всяко $\lambda > 0$ е изпълнено

$$\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu = 0,$$

т.е. $\mu(\{x \in X : f(x) > \lambda\}) = 0$ за всяко $\lambda > 0$. С други думи, $f(x) = 0$ навсякъде освен, може би, върху множества с мярка нула, т.е. $f(x) \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$.

Задача 3

Нека $(X, \mathcal{F}, \mu)$ е пространство с мярка, $f \in M^+(X, \mu)$ и $t > 0$. Полагаме

$$S_f(t) = \{x \in X : f(x) > t\} \quad \text{и} \quad \Psi_f(t) = \mu(S_f(t)).$$

Докажете, че

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \Psi_f(t) dt.$$

Решение. Нека първо $f \in SF^+(X, \mu)$, т.е. съществуват $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ и разбиране $A_1, \dots, A_n$ на X на измерими множества такива, че

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x).$$

Тогава множествата $S_f(t)$ имат вида

$$\begin{aligned} S_f(t) = \{x \in X : f(x) > t\} &= \{x \in X : \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x) > t\} = \bigcup_{i=1}^n \{x \in X : \alpha_i \chi_{A_i}(x) > t\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^n \{x \in A_i : \alpha_i > t\}, \end{aligned}$$

откъдето

$$\Psi_f(t) = \mu(S_f(t)) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \chi_{[0, \alpha_i)}(t),$$

тоест $\Psi_f \in SF^+(\mathbb{R}, m)$.

Тогава за стойностите на интегралите имаме

$$\int_0^\infty \Psi_f dm = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) m([0, \alpha_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \int_X f d\mu.$$

Нека сега $f \in M^+(X, \mu)$ и $f_1, f_2, \dots \in SF^+(X, \mu)$ е поточно растяща редица такава, че $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ поточно. От теоремата на Бепо Леви имаме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Нека да разгледаме $S_f(t)$. Тъй като за всяко $x \in X$ и за всяко $n > 1$ имаме, че $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, то

$$S_f(t) = \{x \in X : f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in X : f_n(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^\infty S_{f_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{f_n}(t).$$

Тогава монотонността на μ ни дава $\Psi_f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{f_n}(t)$. Освен това, от теоремата на Бепо Леви

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \Psi_{f_n} dm = \int_0^\infty \Psi_f dm.$$

Тъй като $\int_0^\infty \Psi_{f_n} dm = \int_X f_n d\mu$ за всяко n , то

$$\int_0^\infty \Psi_f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \Psi_{f_n} dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Задача 4

Установете връзка между крайните борелови знакопроменливи мерки върху краен затворен интервал и функциите с ограничена вариация върху същия интервал.

Решение. Нека $[a, b]$ е краен затворен интервал в $\mathbb{R}$.

Имайки предвид, че всяка знакопроменлива мярка μ чрез декомпозицията на Жордан се разлага по единствен начин на две положителни мерки $\mu = \mu_+ - \mu_-$ и това, че от теоремата на Жордан всяка функция с ограничена вариация се представя (не по единствен начин) като разлика на две монотонно растящи функции, можем да се ограничим само до разглеждането на положителни мерки и монотонно растящи функции.

Ние знаем, че всяка монотонно растяща функция ϕ върху $[a, b]$ поражда предмярка μ_0 , дефинирана чрез

$$\phi^+(x) = \begin{cases} \lim_{t \downarrow x} \phi(t), & x \in [a, b) \\ \phi(b), & x = b \end{cases} \quad \phi^-(x) = \begin{cases} \lim_{t \uparrow x} \phi(t), & x \in (a, b] \\ \phi(a), & x = a \end{cases}$$

$$\mu_0([\alpha, \beta]) = \phi^+(\beta) - \phi^-(\alpha)$$

$$\mu_0((\alpha, \beta)) = \phi^-(\beta) - \phi^-(\alpha)$$

$$\mu_0((\alpha, \beta]) = \phi^+(\beta) - \phi^+(\alpha)$$

$$\mu_0([\alpha, \beta)) = \phi^-(\beta) - \phi^-(\alpha).$$

Чрез тази предмярка, използвайки метода на Каратеодори, можем да построим мярка μ върху $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Обратно, разполагайки с мярка μ , можем да дефинираме монотонна функция $\phi(x) = \mu([a, x])$, $a \leq x \leq b$ (интервалът може да е отворен отдясно, в който случай може да получим друга монотонна функция).

Задача 5

Нека $f, g \in L(\mathbb{R}, m)$, където m е лебеговата мярка върху реалната права. Докажете, че:

(а). функцията $f(x-t)g(t)$ е сумируема като функция на t за почти всяко x ;

(б). $h \in L(\mathbb{R}, m)$, където сме положили

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dm(t);$$

(в). $\|h\|_L \leq \|f\|_L \|g\|_L$.

Решение. Означаваме с $\mathcal{L}$ лебеговата σ -алгебра над $\mathbb{R}$, с $\mathcal{L}^2$ произведението $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ и с m^2 лебеговата мярка върху $\mathcal{L}^2$. Първо ще докажем, че $\phi(x, t) = f(x - t)g(t) \in L(\mathbb{R}^2, m)$.

Фиксираме $\lambda \in \mathbb{R}$. Първо, тъй като f и g са измерими имаме, че множествата

$$X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \lambda\},$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R} : g(y) > \lambda\}$$

са измерими спрямо m . Тогава множествата $X \times \mathbb{R}$ са $\mathbb{R} \times Y$ са правоъгълници в $\mathcal{L}^2$ и понеже $\lambda \in \mathbb{R}$ беше избрано да бъде произволно, функциите f и g са измерими като функции на две променливи. Тогава $\phi \in L(\mathbb{R}^2, m^2)$ като композиция на бореловите функции $(x, t) \mapsto (x - t, t)$ и $(x, t) \mapsto f(x)g(t)$. От теоремата на Фубини получаваме, че сечението $\phi_x(t)$ е измеримо за почти всяко $x \in \mathbb{R}$ като функция на t и

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t)dm(t) \in L(\mathbb{R}^2, m^2),$$

т.е. получаваме (а) и (б). За да установим (в) отново ще използваме теоремата на Фубини, както и трансляционната инвариантност на лебеговата мярка:

$$\begin{aligned} \|h\|_L &= \int_{\mathbb{R}} |h(x)|dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t)dm(t) \right| dm(x) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - t)g(t)|dm(t) \right) dm(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - t)|dm(x) \right) dm(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f\|_L |g|dm = \|f\|_L \|g\|_L. \end{aligned}$$